MATRIČNE JEDNAČINE

U sledećim primerima ćemo pokušati da vam "približimo" rešavanje matričnih jednačina. Takav zadatak se najčešće sastoji iz dva dela. U prvom delu trebate rešiti matričnu jednačinu, odnosno da izrazite X, a u drugom delu se koriste operacije sa matricama...

Rešiti sledeće matrične jednačine:

1) $AX = B$
2) $XA = B$
3) $AX - I = X + B$

1)

$AX = B$ sa leve strane množimo celu jednačinu sa A^{-1}

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

$\boxed{A^{-1}A}X = A^{-1}B$

$I \cdot X = A^{-1}B$

$\boxed{X = A^{-1}B}$

2)

$XA = B$ sa desne strane množimo celu jednačinu sa A^{-1}

$XAA^{-1} = BA^{-1}$

$X \cdot I = BA^{-1}$

$\boxed{X = BA^{-1}}$

3)

$AX - I = X + B$ nepoznate na levu a poznate na desnu stranu...

$AX - X = B + I$ izvlačimo X kao zajednički ispred zagrade , ali sa desne strane!

$(A - I)X = B + I$ celu jednačinu množimo sa $(A - I)^{-1}$, ali sa leve strane!

$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(B + I)$

$I \cdot X = (A - I)^{-1}(B + I)$

$\boxed{X = (A - I)^{-1}(B + I)}$

Rešiti matričnu jednačinu $AX = X + A$ **ako je data matrica** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

<u>Rešenje:</u>

Najpre rešavamo zadatu matričnu jednačinu:

$$AX = X + A$$
$$AX - X = A$$
$$(A - I)X = A$$
$$(A-I)^{-1}(A-I)X = (A-I)^{-1}A$$
$$I \cdot X = (A-I)^{-1}A$$
$$\boxed{X = (A-I)^{-1} \cdot A}$$

Dalje tražimo inverznu matricu $(A - I)^{-1}$. Radi lakšeg zapisa možemo matricu $A - I$ označiti sa M.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M$$

sada je $X = M^{-1} \cdot A$

tražimo $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} adjM$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 1 - 0 = 1 \rightarrow \boxed{\det M = 1}$$, matrica je regularna…

Ako vam se u radu dogodi da je $\det M = 0$, onda takva matrica nema inverznu matricu i tu prekidate sa radom.

Tražimo kofaktore i adjungovanu matricu:

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to M_{11}=+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0 \qquad M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to M_{21}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1 \qquad M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to M_{31}=+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to M_{12}=-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=1 \qquad M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to M_{22}=+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1 \qquad M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to M_{32}=-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1$$

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to M_{13}=+\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=-1 \qquad M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to M_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0 \qquad M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to M_{33}=+\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$adjM=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$, odavde smo dobili da je inverzna matrica:

$$M^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\to \boxed{M^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}}$$

Sad možemo da se vratimo u rešenje i da zamenimo:

$$X=M^{-1}\cdot A$$

$$X=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}0\cdot2+(-1)\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot1+(-1)\cdot2+1\cdot1 & 0\cdot0+(-1)\cdot1+1\cdot2\\ 1\cdot2+1\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot1 & 1\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot2\\ (-1)\cdot2+0\cdot0+1\cdot1 & (-1)\cdot1+0\cdot2+1\cdot1 & (-1)\cdot0+0\cdot1+1\cdot2\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&-1\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

Rešiti matričnu jednačinu $AX-B=BX+I$ ako su date matrice:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&2&-2\end{bmatrix} \quad \textbf{i} \quad B=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$AX - B = BX + I$$
$$AX - BX = B + I$$
$$(A - B)X = B + I$$
$$(A-B)^{-1}(A-B)X = (A-B)^{-1}(B+I)$$
$$\boxed{X = (A-B)^{-1}(B+I)}$$

Izrazili smo X, sada tražimo inverznu matricu …

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Kao i malopre, radi lakšeg rada, ovu matricu ćemo obeležiti sa M.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ onda je } M^{-1} = \frac{1}{\det M} adjM$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 1$$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ \boxed{-2} & 1 & -3 \end{bmatrix} \to M_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & -1 \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{-2} & 1 & -3 \end{bmatrix} \to M_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & -1 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -1 & \boxed{0} & -1 \\ -2 & \boxed{1} & -3 \end{bmatrix} \to M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -2 & \boxed{1} & -3 \end{bmatrix} \to M_{22} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & -1 \\ -1 & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -1 & 0 & \boxed{-1} \\ -2 & 1 & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -2 & 1 & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{-1} \\ -1 & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \to M_{33} = +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$adjM=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&-2&1\\-1&0&0\end{bmatrix}\rightarrow M^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&-2&1\\-1&0&0\end{bmatrix}\rightarrow \boxed{M^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&-2&1\\-1&0&0\end{bmatrix}}$$

$$B+I=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&2\\1&2&2\\2&1&2\end{bmatrix}$$

I konačno je :

$$X=(A-B)^{-1}(B+I)=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&-2&1\\-1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&2&2\\1&2&2\\2&1&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot2+(-1)\cdot1+0\cdot2 & 1\cdot2+(-1)\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot2+(-1)\cdot2+0\cdot2\\(-1)\cdot2+(-2)\cdot1+1\cdot2 & (-1)\cdot2+(-2)\cdot2+1\cdot1 & (-1)\cdot2+(-2)\cdot2+1\cdot2\\(-1)\cdot2+0\cdot1+0\cdot2 & (-1)\cdot2+0\cdot2+0\cdot1 & (-1)\cdot2+0\cdot2+0\cdot2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-5&-4\\-2&-2&-2\end{bmatrix}}$$

Zadaci:

Odredite matricu X tako da vrijedi $B(I-X)=AX$ ako je:

$$A=\begin{bmatrix}2&3&-4\\0&1&-5\\4&0&1\end{bmatrix}\qquad B=\frac{1}{2}\left(A^{T}-I\right)$$

b)

AX+A=BX-B

v)

$A(X-AX)=X+I$

g)

.BA-XA=X-B