# DETERMINANTA MATRICE

Determinanta $A \to detA$ je funkcija definisana na skupu svih kvadratnih matrica. Ona poprima vrijednosti iz skupa skalara. Osim oznake $detA$ za determinantu kvadratne matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

često se koristi i oznaka

$$A = det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanta matrice definiše se induktivno, tj. determinanta matrice $n -$ tog reda definiše se pomoću determinante matrice $(n-1)$–og reda. Pođimo redom.

**Definicija (DETERMINANTA PRVOG REDA)**

Determinanta matrice $A = [\, a \,]$ je broj a.

**DRUGOG REDA**

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc  Računaju se tako što pomnožimo elemente na takozvanoj glavnoj dijagonali, pa od toga oduzmemo pomnožene elemente na sporednoj dijagonali.

Primer:

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \circ 7 - 4 \circ 5 = 21\text{-}20 = 1$  $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = (-1) \circ 12\text{-} (-5) \circ 3 = -12+15 = 3$

**TREĆEG REDA**

Determinante trećeg reda možemo razviti po bilo kojoj vrsti ili koloni. Najpre svakom elementu dodelimo predznak + ili -, i to radimo neizmenično:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$ Samo da vas podsetimo: vrste su $\longrightarrow$, a kolone $\downarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$ Ako recimo hoćemo da razvijemo po prvoj vrsti=

$$= +a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$ , ili ako recimo razvijamo po drugoj koloni:

$$= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

<u>Primer:</u> Izračunaj vrednost determinante $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$ Najpre iznad svakog broja napišite predznake: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$, ili ako vam je

lakše samo iznad brojeva u vrsti ili koloni po kojoj ste rešili da razvijete determinantu. Mi smo rešili po drugoj vrsti jer ima jedna nula (moglo je i po trećoj koloni, sve jedno).

Dakle:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{7} & \overset{-}{0} \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(3\circ 2 - 1\circ 3)+7(5\circ 2-2\circ 1) = -3 +56=53$$

Drugi način za računanje determinanti trećeg reda, medju učenicima vrlo popularan, je **SARUSOVO pravilo**.

Pored date determinante dopišu se prve dve kolone , pa se elementi množe dajući im znake kao na slici:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \; = \; a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3$$

\- \- \-

\+ \+ \+

Primer: Izračunaj vrednost determinante

$$\left|\begin{matrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 5\circ 7\circ 2 + 3\circ 0\circ 2 + 1\circ 1\circ 3 - 3\circ 1\circ 2 - 5\circ 0\circ 3 - 1\circ 7\circ 2 =$$

$$= 70 + 0 + 3 - 6 - 0 - 14 = 53$$

**ČETVRTOG REDA**

$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{matrix}\right|$ = Možemo je razviti po bilo kojoj vrsti ili koloni! I ovde slično kao za determinante trećeg reda prvo napišemo predznake svima ili samo onoj vrsti ili koloni po kojoj ćemo da razvijamo determinantu.

$\left|\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}\right|$ Mi ćemo , recimo, da razvijemo determinantu po prvoj koloni:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a_1} & b_1 & c_1 & d_1 \\ \overset{-}{a_2} & b_2 & c_2 & d_2 \\ \overset{+}{a_3} & b_3 & c_3 & d_3 \\ \overset{-}{a_4} & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= +a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Naravno, sad bi trebalo da razvijemo svaku od ove četiri determinante trećeg reda....

**OSOBINE DETERMINANATA**

1. **Determinanta menja znak ako dve vrste ili kolone izmenjaju svoja mesta.**

2. **Vrednost determinante se ne menja ako sve vrste i kolone promene svoje uloge.**

3. **Determinanta se množi brojem, kad se tim brojem pomnože svi elementi ma koje (ali samo jedne) vrste ili kolone.**
   **Obrnuto, zajednički faktor elemenata jedne vrste ili kolone može se izvući ispred determinante**

   Na primer:

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1k & b_1k & c_1k \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1k & b_1 & c_1 \\ a_2k & b_2 & c_2 \\ a_3k & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ itd.} \quad \text{ili}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. **Ako je u determinanti svaki element neke k-te vrste (kolone) zbir dva ili više sabiraka, onda je ona jednaka zbiru dve ili više determinanata, koje imaju iste elemente kao i data determinanta, osim elemenata k-te vrste (kolone).**

   Na primer:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+m_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+m_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+m_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & m_1 & c_1 \\ a_2 & m_2 & c_2 \\ a_3 & m_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. **Ako su svi elementi jedne vrste(kolone) jednaki nuli, vrednost determinante je nula.**

Primeri:

$$\begin{vmatrix} 3 & -9 & 55 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 77 & 68 & 34 & -80 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

6. **Ako elementi u dve vrste ili kolone imaju iste vrednosti, vrednost determinante je opet nula.**

Primer:

$$\begin{vmatrix} 12 & 7 & 3 \\ -9 & 4 & 6 \\ 12 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ jer su elementi prve i treće vrste jednaki}$$

7. **Ako su dve vrste ( kolone ) proporcionalne među sobom , vrednost determinante je opet nula**.

Primer:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -9 & 5 & 56 \\ 10 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 0 \text{ jer su prva i treća vrsta proporcionalne, tj. prva puta 3 daje treću}$$
vrstu.

8. **Vrednost neke determinante ostaje nepromenjena ako se elementima jedne vrste(kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste(kolone) pomnoženi istim brojem!**

## Ova osma osobina će nam pomoći da lakše rešimo determinante četvrtog i višeg reda.

9. $\det A = \det A^T$

   **Ako transponujemo matricu , vrednost njene determinante se ne menja.**

Primjeri

Izračunati determinante:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$